- Chapitre 0 -
Les systèmes d'équations linéaires

Table des matières

1 Définitions

Définition 1 *On appelle **système linéaire** de m équations linéaires à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n l'ensemble des m relations :*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

*Les nombres a_{ij} ($1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) seront appelés les **coefficients** du système linéaire.*
*Les nombres b_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) seront appelés les **seconds membres** du système linéaire.*
*Les nombres x_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) seront appelés les **inconnues** du système linéaire.*

Exemple 1 *($\mathcal{S}$) :* $\left\{ \begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{array} \right.$

Définition 2 *Un système linéaire est **homogène** lorsque les seconds membres sont tous nuls, soit lorsque $b_1 = ... = b_m = 0$.*

Exemple 2 $\left\{ \begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right.$

RAPPEL : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où x_1, x_2, ..., x_n sont des réels.

En particulier :
$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont des réels.
$\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) où x, y et z sont des réels.

Définition 3 *On appelle **solution du système** linéaire un $n-$uplet de nombres réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$ vérifiant simultanément les m équations du système.*

Définition 4 *On dit d'un système linéaire qu'il est :*

- ***résoluble** lorsqu'il admet une ou plusieurs solutions.*
  *(on dit alors que **ses équations sont compatibles**)*
- ***déterminé** lorsqu'il n'admet qu'une seule solution.*
- ***indéterminé** lorqu'il admet plusieurs solutions.*
- ***impossible** lorsqu'il n'admet pas de solution.*
  *(on dit alors que **ses équations sont incompatibles**)*
- ***redondant** lorsque certaines de ses équations sont des combinaisons linéaires des autres.*
  Dans ce cas, les équations en question ne sont pas utilisées pour résoudre le système linéaire.

2 Résolution pratique

De manière générale, lorsque l'on souhaite résoudre un système, il faut être méthodique. Cela évite de se perdre dans les calculs ou de tourner en rond...

2.1 Opérations élémentaires sur les équations du système

Définition 5 *Les systèmes (S) et (S') sont dits équivalents s'ils ont les mêmes solutions.*

Proposition 1 *Les opérations élémentaires définies ci-dessous permettent de passer d'un système (S) à un système équivalent.*

1. *échanger deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$,*
2. *multiplier une ligne par un réel non nul $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$,*
3. *ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par par un réel non nul $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$*

MÉTHODE : L'idée est d'utiliser ces opérations élémentaires pour "rendre le système triangulaire" et ensuite le "remonter".

Exemple 3 *Considérons le système*$(\mathcal{S})$: $\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & =-1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =1 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & =-2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \end{array}\right.$

Exemple 4 *Considérons le système* $(\mathcal{S})$: $\left\{\begin{array}{lll} x_1 & -2x_2 & =4 \\ x_1 & +3x_2 & =-1 \\ 2x_1 & +x_2 & =1 \end{array}\right.$.

Exemple 5 *Considérons le système* $(\mathcal{S})$: $\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & -x_3 & =a \\ -2x_1 & -3x_2 & +3x_3 & =b \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & =c \end{array}\right.$ *avec a, b et c réels.*

POLY DE TD : exercices 1 et 2.

2.2 Méthode par substitution

Cette méthode consiste à exprimer certaines inconnues en fonctions des autres...
Il ne faut pas l'utiliser de manière systématique car les calculs peuvent vite devenir compliqués !

Exemple 6 *Considérons le système linéaire* $(\mathcal{S})$: $\left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array}\right.$

Exemple 7 *Considérons le système linéaire :* $(\mathcal{S})$: $\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{array}\right.$.

POLY DE TD : exercice 3

- Chapitre 1 -
Les matrices : généralités et opérations

Table des matières

1 Les vecteurs

1.1 Définitions

Définition 1 *Soit n un entier naturel non nul. On appelle* ***vecteur de taille*** *n un tableau constitué d'une seule colonne formée de n nombres réels.*

Notation 1 *Nous noterons :* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ *un tel vecteur.*

Chacun des nombres réels x_i sera appelé ***composante*** *du vecteur X.*
Par exemple, x_1 désignera la première composante du vecteur X, x_2 la seconde composante...

Remarque 1 *Nous noterons souvent $X = (x_i)$ le vecteur X.*

Définition 2 *Soient $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ deux vecteurs.*

X et Y sont égaux si : $\begin{cases} X \text{ et } Y \text{ sont de même taille} \\ \forall i \in \{1; 2; ...; n\} \text{ on a : } x_i = y_i \end{cases}$

Exemple 1

$$\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ c-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ...$$

1.2 Vecteurs particuliers

Définition 3 *On appelle* ***vecteur nul*** *le vecteur dont toutes les composantes sont nulles.*
Nous le noterons : $0_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$.

Définition 4 *On appelle $i^{\text{ème}}$* ***vecteur unitaire*** *le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1.*

Nous le noterons : $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Opérations sur les vecteurs

Définition 5 *Soient $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ deux vecteurs* ***de même taille.***
La ***somme*** *de ces deux vecteurs est le vecteur de taille n que nous noterons $X + Y$ défini par :*

$$X + Y = (x_i + y_i)$$

Exemple 2 *Si* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Proposition 1 *L'addition de vecteurs de taille n possède les propriétés suivantes :*

- *elle est* ***commutative*** *: $\forall X, Y$ on a : $X + Y = Y + X$*
- *elle est* ***associative*** *: $\forall X, Y, Z$ on a : $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$*
- *elle possède 0_n pour* ***élément neutre*** *: $\forall X$ on a : $X + 0_n = 0_n + X = X$*

— *tout vecteur* $X = (x_i)$ *possède un* ***opposé*** Y *pour la loi* "$+$" *qui vérifie* $X + Y = Y + X = 0_n$. *Il est noté* $(-X)$.

Preuve. Ces propriétés dérivent immédiatement des propriétés de l'addition des nombres réels. ■

Remarque 2 *Puisque l'addition vectorielle est associative, nous noterons sans parenthèses la somme de trois vecteurs.*

Définition 6 *Soient* $X = (x_i)$ *un vecteur de taille* n *et* λ *un réel.*
Le ***produit*** *du vecteur* X *par* λ *est noté* $\lambda.X$ *ou encore* λX *est le vecteur de taille* n *défini par :*

$$\lambda.X = (\lambda x_i)$$

Exemple 3 *Si* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\lambda = -5$

Proposition 2 *Le produit d'un vecteur de taille n par un nombre réel possède les propriétés suivantes :*
- $\forall X$ *on a :* $1.X = X$ *et* $0.X = 0_n$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, *on a :* $\lambda.(\mu.X) = (\lambda\mu).X$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall X$ *on a :* $(\lambda + \mu).X = (\lambda.X) + (\mu.X)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y$ *on a :* $\lambda(X + Y) = (\lambda.X) + (\lambda.Y)$

Preuve. Ces propriétés dérivent immédiatement des propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels. ■

Remarque 3 *Nous dirons que l'ensemble des vecteurs de taille n muni de l'addition et du produit par un nombre réel possède une* ***structure d'espace vectoriel***.

Corollaire 1 $\forall X$ *on a :* $(-1).X = -X$

Preuve. $X + (-1)X = (1 - 1)X = 0X = 0_n$ donc $(-1)X$ est bien l'opposé de X pour l'addition. D'où $-X = (-1)X$! ■

Exemple 4

1.4 Dépendance et indépendance linéaire

Définition 7 *Soient* X_1, X_2, ..., X_p p *vecteurs de taille* n *:*
On appelle combinaison linéaire des vecteurs X_1, X_2, ..., X_p *tout vecteur de la forme :*

$$\forall,\ \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p \ \ \textit{avec}\ (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$$

Exemple 5 *Soient* $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On a $X = X = X_1 + 2X_2$ *donc* X *est combinaison linéaire de* X_1 *et* X_2.

Définition 8 p *vecteurs de taille* n *:* X_1, X_2, ..., X_p *sont* ***linéairement indépendants*** *si :*

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$$

Remarque 4
- *On dit encore dans ce cas que la famille de vecteurs* $(X_1, X_2, ..., X_p)$ *est une* ***famille libre***.
- *Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs sont* ***linéairement dépendants*** *ou encore que la* ***famille*** $(X_1, X_2, ..., X_p)$ ***est liée***.

Exemple 6 *Considérons les trois vecteurs :* $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Proposition 3

i) *Si le vecteur nul 0_n figure parmi les vecteurs X_1, X_2, ..., X_p alors ceux-ci sont linéairement dépendants.*

ii) *Des vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres, soit encore :*

$$\exists i \in \{1, 2, ..., p\}\ , \exists \alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_p \in \mathbb{R} \text{ tels que} : X_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \alpha_k X_k$$

iii) *Si parmi les vecteurs X_1, X_2, ..., X_p il existe une famille de vecteurs linéairement dépendants, alors la famille X_1, X_2, ..., X_p est liée.*

Preuve. Ces résultats sont très simples à démontrer et sont laissés à titre d'exercice.
Démontrons juste *ii)* :
$\Rightarrow$ Si la famille $(X_1, \ldots, X_p)$ est liée, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_p X_p = 0_n$.
Si par exemple $\lambda_1 \neq 0$, on a alors $X_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} X_2 - \ldots - \dfrac{\lambda_p}{\lambda_1} X_p$.
Donc X_1 est combinaison linéaire de $X_2, \ldots, X_p$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si l'un des vecteurs, par exemple X_1, est combinaison linéaire des autres.
Il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $X_1 = \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p$.
D'où $1.X_1 - \lambda_2 X_2 - \ldots - \lambda_p X_p = 0_n$ et donc la famille est liée.
■

POLY DE TD : exercices 4 à 6.

2 Les matrices

2.1 Définitions

Définition 9 *Considérons deux nombres entiers naturels non nuls n et p.*
*On appelle **matrice** de **taille** (n, p) (ou matrice à n lignes et p colonnes) un tableau à n lignes et p colonnes.*
Une telle matrice sera notée :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & ... & a_{np} \end{pmatrix}$$ *a_{ij} désignant le terme situé sur la ligne i et colonne j.*

ou encore $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou même $M = (a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

Notation 2 *L'ensemble des matrices de taille (n, p) et à coefficients réels sera noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{M}_{n,p}$.*

Exemple 7

Remarque 5 *Deux matrices M et N sont égales si elles ont la même taille et les mêmes coefficients.*

2.2 Matrices particulières

Nous ne reviendrons pas sur les matrices carrées ainsi que sur les matrices ligne et colonne déjà vues dans le paragraphe précédent. Nous rencontrerons très souvent d'autres matrices particulières .

Définition 10 *Une **matrice symétrique** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n pour laquelle les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux, soit encore une matrice du type $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ telle que : $\forall i, j \in \{1; 2; ...; n\}$ on a : $a_{ij} = a_{ji}$.*

Exemple 8

Définition 11 *Une* ***matrice triangulaire supérieure*** *d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n dont les éléments situés en dessous de la diagonale principale sont tous nuls, soit encore une matrice du type $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que : $\left\{\begin{array}{c}\forall i,j \in \{1;2;...;n\}\\ \text{vérifiant : } i > j\end{array}\right.$ on a : $a_{ij} = 0$.*

Exemple 9

Définition 12 *Une* ***matrice triangulaire inférieure*** *d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n dont les éléments situés au dessus de la diagonale principale sont tous nuls, soit encore une matrice du type $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que : $\left\{\begin{array}{c}\forall i,j \in \{1;2;...;n\}\\ \text{vérifiant : } i < j\end{array}\right.$ on a : $a_{ij} = 0$.*

Exemple 10

Définition 13 *Une* ***matrice diagonale*** *est une matrice carrée dont les éléments situés en dehors de la diagonale principale sont tous nuls, soit encore une matrice du type $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que : $\left\{\begin{array}{c}\forall i,j \in \{1;2;...;n\}\\ \text{vérifiant : } i \neq j\end{array}\right.$ on a : $a_{ij} = 0$.*

Exemple 11

Définition 14 *La* ***matrice identité*** *de rang n est la matrice diagonale d'ordre n pour laquelle tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. On notera I_n ou encore I s'il n'y a pas d'ambigüité possible.*

Exemple 12

Définition 15 *La* ***matrice nulle*** *de taille (n,p) est la matrice de taille (n,p) pour laquelle tous les éléments sont nuls. On la notera $O_{n,p}$.*

2.3 Opérations sur les matrices

<u>L'addition de deux matrices</u>

Définition 16 *Considérons $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$ deux matrices de même taille (n,p).*
La ***somme*** *$M + N$ sera une matrice de taille (n,p) définie par $M + N = (a_{ij} + b_{ij})$;*

Exemple 13 *Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$*

Proposition 4 *La somme matricielle définie précédemment possède les propriétés suivantes :*
- *elle est commutative : $\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}$ on a : $M + N = N + M$;*
- *elle est associative : $\forall M, N, Q \in \mathcal{M}_{n,p}$ on a : $(M + N) + Q = M + (N + Q)$;*
- *$O_{n,p}$ est élément neutre pour l'addition matricielle : $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ on a : $M + O_{n,p} = O_{n,p} + M = M$;*
- *toute matrice $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ possède une matrice opposée qui est notée $(-M)$ définie par $(-M) = (-a_{ij})$.*

Preuve. Ces propriétés proviennent immédiatement des propriétés de l'addition des nombres réels.
■

<u>La multiplication par un nombre réel</u>

Définition 17 *Considérons $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Le ***produit de la matrice*** *M* ***par le nombre réel*** *λ est la matrice de taille (n,p) que nous noterons $\lambda.M$ ou plus simplement λM définie par : $\lambda M = (\lambda.a_{ij})$.*

Exemple 14 *Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 3$.*

Proposition 5 *La multiplication par un nombre réel possède les propriétés suivantes :*
— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $(\lambda + \mu).M = (\lambda.M) + (\mu.M)$
— $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $\lambda.(M + N) = (\lambda.M) + (\lambda.N)$
— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $\lambda.(\mu M) = (\lambda\mu).M$
— $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $1.M = M$

Preuve. Ces résultats se démontrent sans difficultés et sont des conséquences des propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels. ∎

Remarque 6 $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *on a :* $0.M = O_{n,p}$ *et* $(-1).M = -M$

Remarque 7 *Nous dirons que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$ muni de l'addition et du produit par un nombre réel possède une **structure d'espace vectoriel**.*

POLY DE TD : exercice 7.

La multiplication matricielle

Dans ce paragraphe nous allons étudier la multiplication de deux matrices. Notons tout de suite que cette multiplication ne sera pas toujours possible et qu'une condition sur les tailles des matrices sera nécessaire.

Définition 18 *Considérons deux matrices :* $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ *et* $N = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p,q}$.
*Le **produit** de la matrice M par la matrice N sera la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}$, noté $M.N$ définie par :*

$$M.N = (c_{ik}) \text{ avec : } c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{jk}.$$

Remarque 8 *Il faut bien remarquer que le nombre de colonnes de la matrice M doit être égal au nombre de lignes de la matrice N pour pouvoir effectuer le produit $M.N$. Si cette condition n'est pas satisfaite, le produit matriciel ne sera pas défini.*

Exemple 15 *Si* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3;4}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4;2}$

Dans la pratique, on dispose souvent les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} & \left.\begin{pmatrix} \dots & b_{1k} & \dots \\ & b_{2k} & \\ & \vdots & \\ & b_{pk} & \end{pmatrix}\right\} = N \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix}}_{=M} & \left.\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & c_{ik} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}\right\} = MN \end{array}$$

Le terme c_{ik} se situe à l'intersection de la i ème ligne de M et de la k ème colonne de N.

Proposition 6 *Lorsque les produits matriciels sont possibles, nous avons :*
— $(M_1 + M_2).N = (M_1.N) + (M_2.N)$
— $M.(N_1 + N_2) = (M.N_1) + (M.N_2)$

Preuve. Ces propriétés proviennent des propriétés de la multiplication des nombres réels. Démontrons le premier résultat à titre d'exemple.
Si $M_1 = (a_{ij})$, $M_2 = \left(a'_{ij}\right)$ et $N = (b_{jk})$ alors on a : $M_1 + M_2 = \left(a_{ij} + a'_{ij}\right)$ et par conséquent on obtient : $(M_1 + M_2).N = (c_{ik})$ où : $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} \left(a_{i\,j} + a'_{ij}\right).b_{\,jk} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i\,j}.b_{\,jk} + \sum\limits_{j=1}^{p} a'_{ij}.b_{\,jk}$.

Puisque : $\begin{cases} M_1.N = (c'_{ik}) \text{ avec : } c'_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i\,j}.b_{\,jk} \\ M_2.N = (c''_{ik}) \text{ avec : } c''_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a'_{i\,j}.b_{\,jk} \end{cases}$,
on en déduit que : $(M_1 + M_2).N = (M_1.N) + (M_2.N)$. ■

Proposition 7 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *et* $\forall N \in \mathcal{M}_{p,q}$ *on a :* $\lambda.(M.N) = (\lambda.M).N = M.(\lambda.N)$

Preuve. Posons : $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $N = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p,q}$.
On a : $\lambda.(M.N) = (\lambda.c_{ik})$ où $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk}$.

De plus puisque : $\lambda.M = (d_{ij})$ où $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ on obtient : $(\lambda.M).N = (e_{ik})$ avec : $e_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} d_{ij}.b_{\,jk}$, soit encore :
$e_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} (\lambda a_{ij}).b_{\,jk} = \lambda \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk} = \lambda c_{ik}$.
On a donc prouvé que : $\lambda.(M.N) = (\lambda.M).N$
De même, puisque : $\lambda.N = (f_{jk})$ avec $f_{jk} = \lambda.b_{jk}$ on obtient :
$M.(\lambda.N) = (g_{ik})$ où $g_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.f_{\,jk} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.(\lambda.b_{jk}) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk} = \lambda c_{ik}$.
On vient donc de démontrer que : $\lambda.(M.N) = M.(\lambda.N)$ ■

Proposition 8 $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\forall N \in \mathcal{M}_{p,q}$ *et* $\forall P \in \mathcal{M}_{q,r}$ *on a :* $M.(N.P) = (M.N).P$

Preuve. Posons : $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$, $N = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $P = (c_{kl}) \in \mathcal{M}_{q,r}$.
On a : $N.P = (d_{jl})$ avec $d_{jl} = \sum\limits_{k=1}^{q} b_{jk}.c_{kl}$ donc : $M.(N.P) = (e_{il})$ avec $e_{il} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.d_{\,jl}$, soit encore :
$e_{il} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.\left(\sum\limits_{k=1}^{q} b_{jk}.c_{kl}\right) = \sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{q} a_{ij}.b_{jk}.c_{kl} = \sum\limits_{k=1}^{q}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{jk}\right).c_{kl}$.
De plus, on a : $M.N = (f_{ik})$ où $f_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\,jk}$.

On en déduit que : $e_{il} = \sum\limits_{k=1}^{q} f_{ik}.c_{kl}$ et par suite on obtient : $(M.N).P = (e_{il})$, ce qui prouve que : $M.(N.P) = (M.N).P$. ■

Proposition 9 $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}$, $M.I_p = M$ *et* $I_n.M = M$

Preuve. Ces deux propriétés sont évidentes. ■

POLY DE TD : Exercices 8 à 12

La transposition

Définition 19 *Considérons une matrice* $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$.
La ***transposée*** *de la matrice* M *sera une matrice de taille* (p,n) *que l'on notera* ${}^tM$ *définie par :*

$${}^tM = (b_{ji}) \text{ avec : } b_{ji} = a_{ij}.$$

Exemple 16 *Considérons la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque 9

- *La transposée d'une matrice diagonale est la matrice elle-même.*
- *La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.*
- *Une matrice M est symétrique ssi ${}^tM = M$.*

Proposition 10

i) $\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}, \quad {}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$

ii) $\forall M, \in \mathcal{M}_{n,p}, \quad {}^t({}^tM) = M$

iii) $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ , \ {}^t(\lambda.M) = \lambda.{}^tM$

iv) $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}, \forall N \in \mathcal{M}_{p,q}$ *on a :* ${}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM$

Preuve. Ces trois premières propriétés sont évidentes. Démontrons *iv*).

Posons : $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $N = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p,q}$.

On a : $M.N = (c_{ik})$ avec : $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{\ jk}$.

Par conséquent, ${}^t(M.N) = (d_{ki})$ où $d_{k\ i} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i\ j}.b_{\ jk}$

De plus puisque : $\left\{ \begin{array}{l} {}^tN = (e_{k\ j}) \ \text{ avec : } e_{k\ j} = b_{jk} \\ {}^tM = (f_{ji}) \ \text{ avec : } f_{ji} = a_{ij} \end{array} \right.$ on obtient : ${}^tN.{}^tM = (g_{k\ i})$ avec $g_{k\ i} = \sum\limits_{j=1}^{p} e_{k\ j}.f_{ji}$,

soit encore : $g_{k\ i} = \sum\limits_{j=1}^{p} b_{jk}.a_{ij} = d_{k\ i}$.

On obtient donc : ${}^tN.{}^tM = {}^t(M.N)$.

■

POLY DE TD : Exercice 13

- Chapitre 2 -
Matrices carrées et déterminants

Table des matières

1 Produit et puissance des matrices carrées

Nous avons défini le produit de deux matrices dans le chapitre précédent.
Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser au produit de deux matrices carrées d'ordre n.
Il est clair que le produit de deux matrices d'ordre n sera une matrice d'ordre n : on dit que la multiplication matricielle est une loi interne dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1 *Nous avons les propriétés suivantes :*
- $\forall M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on a :* $M.(N.P) = (M.N).P$ *(**associativité** de la multiplication matricielle) ;*
- $\forall M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on a :* $M.(N+P) = (M.N) + (M.P)$ *(la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition) ;*
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on a :* $M.I_n = I_n.M = M$ *(la matrice unité* I_n *est **élément neutre** pour la multiplication matricielle).*

Preuve. Ces résultats ont été vus dans le chapitre précédent. ■

Remarque 1 *Il faut bien noter que **la multiplication matricielle n'est pas commutative** : cela signifie que si* M *et* N *sont deux éléments de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *alors en général,* $M.N \neq N.M$.

Par exemple, si : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :
$M.N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N.M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $M.N \neq N.M$.

Définition 1 *Soient* M *et* N *deux matrices carrées d'ordre* n.
On dit que M *et* N *commutent si* $MN = NM$.

Exemple 1

1.1 Puissances d'une matrice carrée

Définition 2 *Considérons une matrice* M *d'ordre* n.
Soit p *un nombre entier naturel ; la **puissance*** $p^{\text{ème}}$ *de la matrice* M*, que l'on notera* M^p *sera définie par récurrence par :* $\begin{cases} M^0 = I_n \\ M^{p+1} = M.M^p \text{ pour tout entier naturel } p \end{cases}$.

Exemple 2 *Considérons la matrice :* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 3 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n$*,* M *est dite nilpotente si* $\exists p \in \mathbb{N}$*, tel que* $M^p = 0_n$.

Exemple 3 *Soit* $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 2 *ATTENTION :*
La multiplcation matricielle n'étant pas commutative,on ne peut pas utiliser les identités remarquables.
En effet, $(M+N)^2 = M^2 + MN + NM + N^2$ *mais, comme* $MN \neq NM$*, on ne peut pas regrouper les termes centraux ! !*

POLY DE TD : Exercice 14

Théorème 1 *$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$ on a :*

i) $\left({}^tM\right)^p = {}^t\left(M^p\right)$.

ii) $(\lambda M)^p = \lambda^p . M^p$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Preuve. Nous allons démontrer le résultat *i)* à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p. (Le *ii)* est laissé à titre d'exercice).

Initilalisation : Pour $p = 0$, on a $\left({}^tM\right)^0 = I_n = {}^tI_n = {}^t\left(M^0\right)$, la propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $\left({}^tM\right)^p = {}^t\left(M^p\right)$. Montrons que : $\left({}^tM\right)^{p+1} = {}^t\left(M^{p+1}\right)$.
$\left({}^tM\right)^{p+1} = \left({}^tM\right)\left({}^tM\right)^p = \left({}^tM\right).{}^t\left(M^p\right) = {}^t\left(M^p.M\right) = {}^t\left(M^{p+1}\right)$.
Par conséquent la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $\left({}^tM\right)^p = {}^t\left(M^p\right)$. ■

POLY DE TD : Exercices 15 à 17

1.2 La formule du binôme de Newton

RAPPEL : Soit $p \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{0, ..., p\}$ on a $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$

En particulier : $C_p^0 = \dfrac{p!}{0!(p-0)!} = 1$, $C_p^1 = \dfrac{p!}{1!(p-1)!} = p$ et $C_p^2 = \dfrac{p!}{2!(p-2)!} = \dfrac{p(p-1)}{2}$

Théorème 2 *Soient deux matrices M et N d'ordre n.*

*Si M et N **commutent**, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $(M+N)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k M^k . N^{p-k}$*

Preuve. La démonstration de ce résultat se fait à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p et utilise la propriété suivante $C_p^{k-1} + C_p^k = C_{p+1}^k$.
Nous n'allons pas faire la démonstration...mais nous allons expliquer ce résultat :

Lorsque l'on développe le produit $(M+N)^p = (M+N)(M+N)...(M+N)$,
on prend un terme (soit M, soit N) dans chaque facteur.
Soit $k \in \{0, ..., p\}$, si on choisit k fois le terme M, on obtient $M^k N^{p-k}$, car M et N commutent.
Or, il y a C_p^k façons de choisir k fois M parmi les p facteurs. On obtient donc $C_p^k M^k N^{p-k}$.

Pour $k = 0$, cela nous donne $C_p^0 M^0 N^{p-0} = N^p$,

pour $k = 1$, cela nous donne $C_p^1 M^1 N^{p-1} = pMN^{p-1}$,

$\vdots$

pour $k = p$, cela nous donne $C_p^p M^p N^{p-p} = M^p N^0 = M^p$.

En sommant tous ces termes, pour k variant de 0 à p, on obtient $(M+N)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k M^k . N^{p-k}$ ■

Remarque 3 *Il faut noter qu'il est **obligatoire** que les matrices M et N commutent pour pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton.*

Exemple 4 *On considère la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Remarque 4 *La formule du binôme est particulièrement intéressante quand l'une des deux matrices est nilpotente.*

POLY DE TD : Exercices 18 à 20

2 Forme multilinéaire, forme alternée

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 4 *Soit $L : \mathcal{M}_n \longmapsto \mathbb{R}$. Si $A \in \mathcal{M}_n$, on note $A = (C_1, \ldots, C_n)$*

- *On dit que L est multi-linéaire sur $\mathcal{M}_n$ si L est linéaire par rapport à chaque colonne, c'est à dire : $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$*
$$\begin{cases} L(C_1, ..., C_j + C'_j, \ldots, C_n) = L(C_1, ..., C_j, \ldots, C_n) + L(C_1, ..., C'_j, \ldots, C_n) & (1) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ L(C_1, ..., \lambda C_j, \ldots, C_n) = \lambda L(C_1, ..., C_j, \ldots, C_n) & (2) \end{cases}$$
- *On dit que L est alternée si L est changée en son opposé quand on permute 2 colonnes, c'est à dire : $L(C_1, ..., C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -L(C_1, ..., C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$.*

Proposition 2 *Soit L une forme multilinéaire, alternée sur $\mathcal{M}_n$.*

i) Si l'une des colonnes de A est nulle alors $L(A) = 0$.

ii) Si deux des colonnes de A sont égales alors $L(A) = 0$.

iii) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes alors $L(A) = 0$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n$, $A = (C_1, ..., C_n)$

i) Si $\exists j \in \{1, ..., n\}$ tel que $C_j = 0$,
$L(A) = L(C_1, ..., O, ..., C_n) = 0.L(C_1, ..., O, ..., C_n) = 0$ d'après (2) car L est linéaire.

ii) Si $\exists i \neq j$ tels que $C_i = C_j$:
On a : $L(A) = L(C_1, ..., C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = L(C_1, ..., C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$ car $C_i = C_j$. Mais aussi :$L(A) = L(C_1, ..., C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -L(C_1, ..., C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$, car L est alternée.
Donc $L(A) = -L(A) \Rightarrow L(A) = 0$.

iii) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors l'une d'elles (par exemple C_1) peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
$\exists(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $C_1 = \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_n C_n$, donc par multi-linéarité, on obtient :

$$\begin{aligned} L(C_1, C_2, \ldots, C_n) &= L(\lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_n C_n, C_2, \ldots, C_n) \\ &= \lambda_2 L(C_2, C_2, \ldots, C_n) + \ldots + \lambda_n L(C_n, C_2, \ldots, C_n) \\ &= 0 \text{ d'aprés la propriété précédente.} \end{aligned}$$

■

2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Théorème 3 *Il existe une unique forme L, multi-linéaire alternée sur $\mathcal{M}_n$ telle que $L(I_n) = 1$.*

Preuve. Nous allons faire la démonstration dans le cas particulier $n = 2$.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Unicité de L :
Supposons qu'il existe L multi-linéaire alternée telle que $L(C_1, C_2) = 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} L(A) = \ & L(aC_1 + bC_2, cC_1 + dC_2) & \\ &= aL(C_1, cC_1 + dC_2) + bL(C_2, cC_1 + dC_2) & \text{car } L \text{ linéaire/}1^{ere} \text{ colonne} \\ &= acL(C_1, C_1) + adL(C_1, C_2) + bcL(C_2, C_1) + bdL(C_2, C_2) & \text{car } L \text{ linéaire/}2^{eme} \text{ colonne} \\ &= adL(C_1, C_2) + bcL(C_2, C_1) & \text{car } L(C_1, C_1) = L(C_2, C_2) = 0 \\ &= ad - bc & \text{car } L(C_2, C_1) = -L(C_1, C_2) = -1 \end{aligned}$$

Donc on obtient que L est unique et définie par $L(A) = L \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Existence de L :
Il suffit de considérer L définie ci-dessus. On vérifie aisément que c'est bien une forme multilinéaire alternée sur $\mathcal{M}_2$ et que $L(I_2) = L(C_1, C_2) = 1$. ■

Définition 5 *Cette forme est appelée* ***déterminant*** *. On note* $\det(A)$ *le déterminant de la matrice* A*.*

NOTATION :
Soit $A \in \mathcal{M}_n$, $A = (a_{ij})$.
Une autre notation, souvent utilisée pour le déterminant est la suivante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque 5 *(Régle du Gamma)*
Pour une matrice carrée d'ordre 2, nous avons démontré que $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Exemple 5 $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

2.3 Propriétés du déterminant

Remarque 6 *Le déterminant étant une forme multilinéaire alternée, les propriétés vues dans le paragraphe précédent sont vérifiées.*
C'est à dire :

- *Si l'une des colonnes de* A *est nulle alors* $\det(A) = 0$.
- *Si deux des colonnes de* A *sont égales alors* $\det(A) = 0$.
- *Si les colonnes de* A *sont linéairement dépendantes alors* $\det(A) = 0$.

Exemple 6

Proposition 3 *On ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.*

Preuve. Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n)$.
Soit A' désigne la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes de la matrice A.
$A' = (C_1, C_2, ..., C_k + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j C_j, ..., C_n)$.
Nous pouvons dire, compte tenu de la linéarité du déterminant que l'on a :
$\det(A') = \det(C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n) + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j \det(C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_n)$
soit encore : $\det(A') = \det(C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n) = \det(A)$
puisque dans chacune des matrices $(C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_n)$ il y aura toujours deux colonnes identique et donc en vertu de la proposition précédente, nous en déduirons que : $\det(C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_n) = 0$. ■

Proposition 4 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *:* $\det(\lambda A) = \lambda^n . \det(A)$

Preuve.
Si on a : $A = (C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n)$ alors on en déduit que : $\lambda A = (\lambda C_1, \lambda C_2, ..., \lambda C_k, ..., \lambda C_n)$.
En utilisant la multi-linéarité du déterminant, nous en déduisons que :
$\det(\lambda A) = \lambda.\lambda...\lambda \det(C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_n) = \lambda^n \det(A)$.
■

Remarque 7 *Il faut remarquer que :* $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.
Par exemple, prenons : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Nous avons : $\det(A) = 7$, $\det(B) = -5$, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\det(A + B) = 4 \neq \det(A) + \det(B)$.

POLY DE TD : Exercices 21 et 22

3 Cofacteurs - Développement du déterminant

3.1 Cofacteurs

Définition 6 *Considérons la matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

*On appelle **cofacteur** de l'élément* a_{ij} *de la matrice* A *le nombre réel* $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)})$ *où* $A^{(i,j)}$ *désigne la matrice d'ordre* $(n-1)$ *obtenue à partir de la matrice* A *en lui supprimant la ligne* i *et la colonne* j.

On appelle comatrice de A*, on note* $com(A)$ *la matrice des cofacteurs*

Remarque 8 *Chaque cofacteur est affecté d'un signe* $+$ *ou d'un signe* $-$ *selon que la somme* $i+j$ *est paire ou impaire, ce qui, graphiquement, correspond à la situation suivante :*

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & ... \\ - & + & - & + & ... \\ + & - & + & - & ... \\ - & + & - & + & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

Exemple 7 *Considérons la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

3.2 Développement du déterminant

Théorème 4 ***: Développement suivant la colonne*** j
Si on a : $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *alors* $\forall j \in \{1, ..., n\}$ *on a :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(i,j)})$$

Preuve. Ce théorème est admis. ■

Remarque 9 *Nous avons, grâce à ce théorème, une méthode qui nous permet de transformer un déterminant d'ordre* n *en* n *déterminants d'ordre* $(n-1)$ *...*
Il sera judicieux de développer le déterminant suivant la colonne qui contient le plus de zéros.
Si la matrice ne contient pas (ou peu) de zéros, il faudra utiliser les propriétés vues sur les déterminants afin d'en faire apparaitre, avant de se lancer à corps perdu dans les calculs...

Proposition 5 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n$, $\det({}^tA) = \det(A)$

Remarque 10 *Cela signifie que pour calculer un déterminant, on peut travailler aussi bien sur les lignes de* A *que sur les colonnes.*
Toutes les propriètés vues précédemment sont encore valables en remplaçant "colonne" par "ligne"

Exemple 8 *Etudions un cas particulier :* ***la matrice triangulaire supérieure****.*

Proposition 6 *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes diagonaux*

Remarque 11 *D'une façon analogue (en développant par rapport à la première ligne) nous prouverions que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ou diagonale est égal au produit de ses termes diagonaux*

3.3 Exemples

Exemple 9 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 10 *Calculons le déterminant :* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Remarque 12 *Dans le cas d'un déterminant d'ordre* 3*, nous avons :*

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = (ab'c'' + a''bc' + a'b''c) - (a''b'c + a'bc'' + ab''c') \, .$$

Cette règle est appelée la ***règle de Sarrus****.*
En effet, développons le déterminant par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} &= a. \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b. \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c. \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} \\ &= a\,(b'c'' - b''c') - b\,(a'c'' - a''c') + c\,(a'b'' - a''b') \end{aligned}$$

il ne reste plus ensuite qu'à développer puis regrouper les termes pour obtenir le résultat annoncé.

POLY DE TD : Exercices 23 à 27

- Chapitre 3 -
Matrices inversibles

Table des matières

Dans tout ce chapitre, les matrices utilisées seront exclusivement des matrices carrées d'ordre n.

1 Les matrices carrées inversibles

1.1 Définitions

Définition 1 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n$

- *M est inversible si il existe $N \in \mathcal{M}_n$ telle que $MN = NM = I_n$.*
- *On note $GL_n(\mathbb{R})$, (ou, plus simplement, GL_n) l'ensemble des matrices inversibles.*

Proposition 1 *La matrice N, quand elle existe, est alors unique. On l'appelle matrice inverse de M, on la note M^{-1}.*

Preuve. Supposons qu'il existe N et N' dans $\mathcal{M}_n$ telles que $MN = NM = I_n$ et $MN' = N'M = I_n$.
On a, en particulier, $MN = I_n$.
Donc, en multipliant à gauche par N', $N'MN = N'I_n$ soit $N = N'$ (car $N'M = I_n$).
■

Remarque 1 *Soit $M \in \mathcal{M}_n$, on peut montrer que :*

$$\begin{array}{lclcl} M \text{ est inversible} & \Longleftrightarrow & M \text{ est inversible à droite} & \Longleftrightarrow & M \text{ est inversible à gauche} \\ & \Longleftrightarrow & \text{il existe } N \in \mathcal{M}_n \text{ telle que } MN = I_n & \Longleftrightarrow & \text{il existe } N' \in \mathcal{M}_n \text{ telle que } N'M = I_n \end{array}$$

On a alors $N = N' = M^{-1}$.

Exemple 1 *La matrice identité d'ordre n*

Exemple 2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 3 *Considérons les matrices d'ordre 2 :* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

POLY DE TD : Exercices 28 à 31

1.2 Recherche pratique de la matrice inverse

Considérons une matrice M d'ordre n.
Pour déterminer si la matrice M est inversible, nous chercherons à résoudre le système $Y = M.X$ dans lequel les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ joueront respectivement les rôles d'inconnue et de paramètre :

- si nous trouvons un seul vecteur solution X à ce système nous pourrons en déduire que la matrice M est inversible et que la matrice inverse M^{-1} est définie par la relation : $X = M^{-1}.Y$ puisque : $Y = M.X \Longleftrightarrow M^{-1}.Y = M^{-1}.(M.X) = (M^{-1}.M).X = I_n.X = X$.
- si nous ne trouvons pas de solution ou encore une infinité de solutions au système, nous en déduirons que la matrice M n'est pas inversible.

Exemple 4 *Considérons la matrice :* $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exemple 5 *Considérons la matrice :* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

POLY DE TD : Exercice 32

1.3 Propriétés des matrices carrées inversibles

a) Transposée d'une matrice inversible

Théorème 1 *Considérons une matrice carrée M d'ordre n.*
Si la matrice M est inversible, alors sa matrice transposée ${}^tM$ est inversible et on a :
$({}^tM)^{-1} = {}^t\left(M^{-1}\right)$.

Preuve. Puisque : $\left(M^{-1}.M\right) = I_n$ on en déduit que : ${}^t\left(M^{-1}.M\right) = {}^tI_n = I_n$,
soit encore : ${}^tM.{}^t\left(M^{-1}\right) = I_n$.
Par conséquent, la matrice ${}^tM$ sera inversible à droite, donc sera inversible et sa matrice inverse sera : $({}^tM)^{-1} = {}^t\left(M^{-1}\right)$. ■

b) Produit de deux matrices inversibles

Théorème 2 *Considérons deux matrices M et N d'ordre n.*
Si les matrices M et N sont inversibles, d'inverses respectifs M^{-1} et N^{-1} alors leur matrice produit $M.N$ sera inversible et on aura : $(M.N)^{-1} = N^{-1}.M^{-1}$.

Preuve. On a : $\left(N^{-1}.M^{-1}\right).(M.N) = N^{-1}.\left(M^{-1}.M\right).N = N^{-1}.I_n.N = N^{-1}.N = I_n$.
Par conséquent, la matrice produit $M.N$ est inversible à gauche, donc sera inversible et on aura :
$(M.N)^{-1} = N^{-1}.M^{-1}$. ■

c) Puissance d'une matrice inversible

Proposition 2 *Si M est une matrice carrée d'ordre n inversible, alors :*
$\forall p \in \mathbb{N}$, la matrice M^p est inversible et on a : $(M^p)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p$.

Preuve. Démontrons ce résultat par récurrence sur p.
Initialisation : On a : $M^0 = I_n$ et par suite la matrice M^0 sera inversible d'inverse :
$\left(M^0\right)^{-1} = I_n^{-1} = I_n = \left(M^{-1}\right)^0$.
La propriété est donc bien vérifiée au rang 0.
Hérédité : On suppose que pour un entier naturel p fixé quelconque la matrice M^p est inversible et que son inverse est $(M^p)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p$.
Nous allons montrer que la matrice M^{p+1} est inversible et que son inverse est $\left(M^{-1}\right)^{p+1}$.
Puisque : $M^{p+1} = M.M^p$ et compte tenu que M et M^p sont inversibles, on déduit du théorème du paragraphe précédent que la matrice M^{p+1} sera inversible (produit de deux matrices inversibles).
De plus, on aura : $\left(M^{p+1}\right)^{-1} = (M.M^p)^{-1} = (M^p)^{-1}.M^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p.M^{-1} = \left(M^{-1}\right)^{p+1}$.
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}$, la matrice M^p est inversible et on a : $(M^p)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p$. ■

Définition 2 *Considérons une matrice M d'ordre n inversible et un entier naturel p.*
Nous définirons la puissance négative de la matrice M par : $M^{-p} = (M^p)^{-1}$.

Remarque 2 *Compte tenu de la propriété précédente nous aurons :* $M^{-p} = (M^p)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^p$.

Proposition 3 *Si M est une matrice carrée d'ordre n inversible alors :*
$\forall p, q \in \mathbb{Z}$ *on a :* $M^p.M^q = M^{p+q}$.

Preuve. Quatre cas sont à envisager :
— si $p, q \in \mathbb{N}$: cette propriété provient de la définition de la puissance positive d'une matrice.
— si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}_-$: on pose : $q' = -q \in \mathbb{N}$.
On a donc : $M^p.M^q = M^p.M^q.I_n = M^p.M^q.(M^{q'}.(M^{q'})^{-1}) = M^p.\left(M^{-q'}.M^{q'}\right).M^{-q'}$
soit encore : $M^p.M^q = M^p.\left(\left(M^{q'}\right)^{-1}.M^{q'}\right).M^{-q'} = M^p.I_n.M^{-q'} = M^p.M^{-q'}$
— ce qui donne : $M^p.M^q = M^{p+(-q')} = M^{p+q}$.
— Les deux cas restants : ($p \in \mathbb{Z}_-$ et $q \in \mathbb{N}$) et ($p \in \mathbb{Z}_-$ et $q \in \mathbb{Z}_-$) se traiteront de la même façon que le cas précédent.

■

2 Caractérisation à l'aide du déterminant

2.1 Condition nécéssaire et suffisante d'inversibilité

Proposition 4 *(admise)*
$\forall A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

Remarque 3

- *On peut déduire de ce résultat que si A est inversible, alors* $\det(A) \neq 0$.
En effet, si A est inversible, alors A^{-1} existe et $A.A^{-1} = I_n$ donc

$$\det(A.A^{-1}) = \det(I_n) \iff \det(A).\det(A^{-1}) = 1$$

D'où $\det(A) \neq 0$ *et* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- *On pourrait en fait démontrer que : A est inversible ssi* $\det(A) \neq 0$.

POLY DE TD : Exercices 28 à 31

2.2 Calcul de l'inverse par la comatrice

Théorème 3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
On a : $A.{}^t com(A) = {}^t com(A).A = \det(A).I_n$.

Preuve. On a : $com(A) = (c_{ij})$ avec : $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{(i,j)})$; par conséquent, $com(A) = \left(c'_{ij}\right)$ avec :
$c'_{ij} = c_{ji}$.
Posons : $B = A.{}^t com(A)$, on a donc : $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ avec : $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.c'_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.c_{jk}$.
1^{er} cas : Si $i = j$
Alors on a : $b_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.c_{ik} = \det(A)$ d'après le théorème II)2).
$2^{\grave{e}me}$ cas : Si $i \neq j$
On a dans ce cas : $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.c'_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.c_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_{ik} - a_{jk}).c_{jk} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}.c_{jk}$.
Soit encore : $b_{ij} = -\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{jk} - a_{ik}).c_{jk} + \det(A)$.
Or : $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{jk} - a_{ik}).c_{jk}$ représente le développement par rapport à la ligne j du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la $j^{\grave{e}me}$ ligne de la matrice A par la différence entre la $j^{\grave{a}me}$ ligne et

la $i^{ème}$ ligne de la matrice A et on sait d'après les propriétés du déterminant qu'il sera identique à celui de la matrice A.
Par conséquent on aura : $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{jk}-a_{ik}).c_{jk}=\det(A)$ et par suite : $b_{ij}=0$.
<u>Conclusion</u> :
On a donc montré que : $b_{ij}=\begin{cases}\det(A) \text{ si } i=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$, et par suite on en déduit que :
$B=A.{}^t com(A)=\det(A).I_n$.
On démontrerait d'une façon analogue que : ${}^t com(A).A=I_n$. ■

Corollaire 1 *Si* $\det(A)\neq 0$, *la matrice* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est inversible et on a :* $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}{}^t com(A)$

Remarque 4

- *Cette proposition est utilisable pour* $n=2$ *voire* $n=3$, *au delà, elle n'est pas trés pratique. En effet, pour* $n=4$, *cela revient à calculer* 16 *déterminants d'ordre* 3 ...
- *Pour* $n=2$, *cela donne : Si* $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ *avec* $ad-bc\neq 0$.
Alors A *est inversible et on a* $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$.

Exemple 6 *Soit* $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

Exemple 7 *Reprenons la matrice* $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *étudiée au chapitre 2.*

POLY DE TD : Exercice 35

2.3 Systèmes de Cramer

Considérons le système linéaire de n équations à n inconnues :

$$(S):\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ ...\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

Posons : $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ ...\\ b_n\end{pmatrix}$.

Définition 3 *Le système* (S) *est de* ***Cramer*** *si* $\det(A)\neq 0$ *(c'est à dire si* A *est inversible).*

Théorème 4 *Le système* (S) *précédent admet une unique solution* $(x_1,x_2,...,x_n)$ *si et seulement si c'est un système de Cramer.*
Dans ce cas, cette solution est donnée par les formules de Cramer :

$$\forall i\in\{1;2;...;n\} \text{ on a : } x_i=\frac{\Delta_i}{\det(A)}$$

où Δ_i *désigne le déterminant obtenu en remplaçant dans* $\det(A)$ *la* $i^{ème}$ *colonne par la colonne* B.

Exemple 8 *considèrons le système* $(S):\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$.

POLY DE TD : Exercices 36 et 37

- Chapitre 4 -
Valeurs propres et vecteurs propres - Diagonalisation

Table des matières

1 Valeurs propres et vecteurs propres

1.1 Définition

Définition 1 *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *λ est une valeur propre de A si $\exists X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0_n$ tel que $AX = \lambda X$.*
- *un tel vecteur X est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Remarque 1

- *Le système linéaire $AX = \lambda X$ est résoluble car il admet toujours au moins une solution : $X = 0_n$.*
- *Pour savoir si λ est une valeur propre de A, il faut savoir si le système linéaire $AX = \lambda X$. (c'est à dire $(A - \lambda I_n)X = 0$) admet une solution autre que $X = 0_n$.*

Posons $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. P est un polynôme de degré n en λ.
Il est appelé **polynôme caractéristique** de A.

Deux cas se présenteront :
1^{er} cas : Si $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \neq 0$,
la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible et donc, d'après ce que nous avons vu dans les chapitres précédents, le système linéaire aura une solution unique (qui sera $X = 0$). Ce cas ne nous intéressera donc pas car alors λ n'est pas valeur propre de A.
$2^{ème}$ cas : Si $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$,
Le système n'est pas de Cramer. Sachant qu'il admet déjà une solution, il en admet donc une infinité. Dans ce cas, λ est valeur propre de A.
D'où la proposition suivante :

Proposition 1 *λ est valeur propre de A si et seulement si $P(\lambda) = 0$.*

Remarque 2

- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A admet au plus n valeurs propres (distinctes ou non).*
- *λ est dite valeur propre d'ordre q si c'est une racine de P de multiplicité q.*
- *A est inversible si et seulement 0 n'est pas valeur propre de A.*

Exemple 1 *Considérons la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 2 *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire A sont les valeurs des éléments de la diagonale principale de la matrice.*

Preuve. La matrice A étant triangulaire, son polynôme caractéristique sera :
$P(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) ... (a_{nn} - \lambda)$ et par suite,

$$P(\lambda) = 0 \iff \lambda = a_{11}, \text{ ou } ....., \text{ ou } a_{nn}$$

Les valeurs propres de A seront : $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, ..., $\lambda_n = a_{nn}$.
■

POLY DE TD : Exercice 38

1.2 Propriétés

a) Propriétés des valeurs propres

Proposition 3
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si S est une matrice carrée inversible, alors les matrices A, ${}^tA$ et $S^{-1}AS$ ont le même polynôme caractéristique.
Par suite, ces trois matrices auront les mêmes valeurs propres.

Preuve. On a :
$\det({}^tA - \lambda I_n) = \det({}^tA - \lambda {}^tI_n) = \det({}^t(A - \lambda I_n)) = \det(A - \lambda I_n)$,

$\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}I_nS) = \det(S^{-1}(A - \lambda I_n)S) = \det(S^{-1}).\det(A - \lambda I_n).\det(S)$
ce qui donne : $\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$ puisque $\det(S^{-1}) = \dfrac{1}{\det(S)}$.
Nous en déduisons que : $\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = \det({}^tA - \lambda I_n)$. ■

Proposition 4
Si A est inversible et si λ est une valeur propre de A alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.
De plus, les vecteurs propres associés sont les mêmes.

Preuve. Remarquons tout d'abord que A est inversible donc $\lambda \neq 0$...

Il existe X_0 dans $\mathbb{R}^n$, $X_0 \neq 0$ tel que $AX_0 = \lambda X_0$, par conséquent : $\lambda A^{-1}X_0 = A^{-1}AX_0 = X_0$.
Par suite, nous avons : $A^{-1}X_0 = \dfrac{1}{\lambda}X_0$ ce qui prouve que $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}
et que les vecteurs propres de A^{-1} pour la valeur propre $\dfrac{1}{\lambda}$ sont les vecteurs propres de A pour la valeur propre λ. ■

Proposition 5
Si λ est une valeur propre d'une matrice A, alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, λ^p est une valeur propre de A^p.
De plus, les vecteurs propres associés sont les mêmes.

Preuve. Démontrons ce résultat par récurrence sur p.
Initialisation : Par hypothèse, λ^1 est une valeur propre de A^1.
Il existe donc $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $X_0 \neq 0$ tel que $AX_0 = \lambda X_0$.

Hérédité : Soit $k \geqslant 1$, fixé.
On suppose que λ^k est une valeur propre de A^k, avec X_0 comme vecteur propre associé.
On montre que λ^{k+1} est une valeur propre de A^{k+1} avec X_0 comme vecteur propre associé.

On a : $A^{k+1}X_0 = A^k(AX_0) = A^k(\lambda X_0) = \lambda(A^kX_0) = \lambda(\lambda^kX_0) = \lambda^{k+1}X_0$.
Par conséquent, λ^{k+1} est une valeur propre de A^{k+1}, avec X_0 comme vecteur propre associé.
La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, λ^p est une valeur propre de A^p, avec X_0 comme vecteur propre associé. ■

b)Propriétés des vecteurs propres

Proposition 6 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.*
Toute combinaison linéaire, non nulle, de vecteurs propres associés à λ est elle-même un vecteur propre de A associé à λ.

Preuve. Supposons que : X_1, X_2, ...,X_p sont p vecteurs propres associés à la valeur propre λ.
On a donc : $\forall k \in \{1, 2, ..., p\}$ alors : $AX_k = \lambda X_k$.
Si α_1, α_2, ..., α_p désignent p nombres réels quelconques, nous obtenons :

$$A\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\left(AX_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\alpha_k(\lambda X_k) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k X_k\right)$$

Par suite, $\sum\limits_{k=1}^{p}\alpha_k X_k$ sera un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ. ■

Remarque 3 *En particulier, si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ alors kX aussi. (avec $k \in \mathbb{R}^*$)*

Remarque 4 *Une étude plus complète de l'algèbre linéaire, nous montrerait que l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre, ensemble auquel on ajoute le vecteur nul, forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^n$.*
Ce sous-espace vectoriel est appelé ***sous-espace propre*** *associé à la valeur propre en question.*

Proposition 7 *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.*

Preuve. Considérons p vecteurs propres X_1, ..., X_p de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspondants respectivement aux valeurs propres différentes λ_1, ..., λ_p.
Nous allons démontrer le résultat à l'aide d'un raisonnement par l'absurde :

Supposons donc que ces p vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.
Appelons r le nombre maximum de vecteurs qui sont linéairement indépendants parmi ces p vecteurs.
Nous avons donc $r < p$.
Pour simplifier les notations, supposons que ces r vecteurs soient les vecteurs X_1, ..., X_r.
Le vecteur X_p sera donc combinaison linéaire de ces r vecteurs.
Il existera donc r nombres réels α_1, ..., α_r tels que : $X_p = \sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k X_k$.
Comme nous avons : $AX_p = \lambda_p X_p$, nous en déduisons donc que : $A\left(\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k X_k\right) = \lambda_p \sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k X_k$,
d'autre part : $\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k AX_k = \sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k\lambda_k X_k$ d'où $\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k\lambda_k X_k = \lambda_p\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k X_k$.
Nous en déduisons donc que : $\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k\left(\lambda_p - \lambda_k\right)X_k = 0$.
Or la famille $\{X_1, ..., X_r\}$ est libre donc $\alpha_k\left(\lambda_p - \lambda_k\right) = 0$.
Et puisque pour tout k nous avons $\lambda_p \neq \lambda_k$, nous en tirons que les coefficients α_k sont tous nuls.
Par suite, le vecteur X_p sera nul, ce qui est impossible puisque c'est un vecteur propre.

Par conséquent l'hypothèse faite est fausse , d'où le résultat annoncé. ■

Proposition 8 *(admise)*
A une valeur propre de multiplicité q, on peut associer au plus q vecteurs propres linéairement indépendants.

2 La diagonalisation d'une matrice

2.1 Définition

Définition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
La matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice S d'ordre n, inversible telle que la matrice $S^{-1}AS$ soit diagonale.

Remarque 5

- *Si la matrice A est diagonalisable, il n'y a pas unicité de la matrice S.*
- *Une telle matrice S est parfois appelée matrice de transformation.*

Remarque 6

- *On sait que la matrice $S^{-1}AS$ a le même polynôme caractéristique que la matrice A.*
Les éléments diagonaux de la matrice $S^{-1}AS$ seront donc les valeurs propres de la matrice A.
Nous noterons dans ce cas : $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *où* $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
- *La matrice $S^{-1}AS$ a aussi la même trace que A.*
(RAPPEL : trace de A : $Tr(A)$ =somme des éléments diagonaux de A).
On a donc $Tr(A) = Tr(\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)) = \lambda_1 + ... + \lambda_n = \sum$ valeurs propres de A.
Cela peut servir pour vérifier les calculs...

2.2 CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable

Théorème 1 ***Théorème fondamental de la diagonalisation***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
A est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

De plus, les colonnes de la matrice S de transformation sont les vecteurs propres de la matrice A rangés dans l'ordre où apparaîtront les valeurs propres dans la matrice diagonale.

Preuve.

$\Rightarrow$ Supposons que la matrice A soit diagonalisable.
Posons $S = [C_1, ..., C_n]$ où C_i désigne la $i^{ème}$ colonne de la matrice S.

On a : $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ donc $AS = S.\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \Leftrightarrow [AC_1, ..., AC_n] = [\lambda_1 C_1, ..., \lambda_n C_n]$.
Par conséquent : $\forall k \in \{1, ..., n\}$ on a : $AC_k = \lambda_k C_k$.
Cela montre que les n colonnes de la matrice S sont des vecteurs propres de la matrice A.
De plus, ils sont linéairement indépendants puisque S est inversible et donc $\det(S) \neq 0$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, soient $X_1, ..., X_n$ n vecteurs propres de la matrices A, linéairement indépendants, associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (pas nécéssairement distinctes).
Posons $S = [X_1, ..., X_n]$.

S est une matrice carrée d'ordre n et comme les vecteurs $X_1, ..., X_n$ sont linéairement indépendants, S est inversible.

De plus, on a :
$S^{-1}AS = S^{-1}[AX_1, ..., AX_n] = S^{-1}[\lambda_1 X_1, ..., \lambda_n X_n]$
soit encore : $S^{-1}AS = S^{-1}[X_1, ..., X_n]\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = S^{-1}S\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

■

Corollaire 1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

Preuve. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de A et $X_1, ..., X_n$ n vecteurs propres associés.
On sait que les vecteurs $X_1, ..., X_n$ sont linéairement indépendants donc on peut appliquer le théorème précédent. ■

Exemple 2 *Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ vue au début de ce chapitre.*

Proposition 9 (admise)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, ...\lambda_k$ les valeurs propres de A.
On note α_i l'ordre de la valeur propre λ_i (comme racine du polynôme caractéristique).
On suppose que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$.
Alors la matrice A est diagonalisable si et seulement si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à chaque valeur propre λ_i est égal à α_i

Preuve. Ce résultat est admis. ■

3 Exemples

3.1 avec valeurs propres simples

Exemple 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2 avec valeurs propres multiples

Exemple 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 5

On concidère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

POLY DE TD : Exercices 39 et 44

Faculté des sciences économiques et sociales
Université Lille 1

LICENCE 2 économie - gestion
Sections 1 et 2

TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE L'ÉCONOMISTE
Calcul Matriciel

DOSSIER DE TD

Marie PELINI COUPIER

Exercices relatifs au chapitre 0
Les systèmes d'équations linéaires

Exercice 1

En utilisant les opérations élémentaires, résoudre les systèmes suivants :

1. $(S) : \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$.

2. $(S) : \begin{cases} x + 2y - z + 3w = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w = 10 \end{cases}$.

Exercice 2

On considère le système $(S) : \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ où a désigne un paramètre réel.

Résoudre le système (S) en discutant selon les valeurs du paramètre a.

Exercice 3

En utilisant la méthode par substitution, résoudre les systèmes suivants :

1. $(S) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

2. $(S) : \begin{cases} y + 3z + t = 1 \\ x + 2y + z + t = 2 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$

Exercices relatifs au chapitre 1
Les matrices : généralités et opérations

Exercice 4

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement dépendants ou indépendants?
Dans le cas où ils sont linéairement dépendants, donner une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

1. $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. $X_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

On considère les trois vecteurs :

$$X_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \text{ où } a \text{ désigne un paramètre réel}$$

1. A quelle condition sur a la famille (X_1, X_2, X_3) est-elle libre?

2. Pour $a = 1$ et $a = -2$, donner une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce vecteur est-il combinaison linéaire de X_1 et X_2 ?

2. Même question pour le vecteur $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système : $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ d'inconnues X et Y.

Exercice 8

On considère les trois matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer, si c'est possible, AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^2, B^2 et C^2.

Que constatez vous ?

Exercice 9

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où a et b désignent deux nombres réels.
Déterminer toutes les matrices $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $MN = NM$.

Exercice 10

Vérifier l'associativité du produit matricel avec les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Déterminer toutes les matrices X de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

On considère l'ensemble des matrices :

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3 \text{ telles que } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels} \right\}$$

1. Montrer que toute matrice de E peut s'écrire de manière unique $M = aI_3 + bB + cC$, où B et C sont des matrices que l'on précisera.
2. Calculer BC, CB, B^2 et C^2. En déduire que le produit de deux matrices M et M' de E est encore un élément de E.

Exercice 13

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer : $({}^tA)A$ et $A({}^tA)$.

Exercices relatifs au chapitre 2
Matrices carrées et déterminants

Exercice 14

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2.
2. Commenter ce résultat?

Exercice 15

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3. Que remarquez vous ?
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, conjecturer l'expression de A^n en fonction de la matrice A. Vérifier cette conjecture grâce à une recurrence.

Exercice 16

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Déterminer la matrice B telle que : $A^2 = A + B$.
3. (a) Démontrer que : $AB = B$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = A + (n-1)B$.

Exercice 17

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. Déterminer a et b réels tels que $A = aP + bQ$.
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^nP + b^nQ$.

Exercice 18

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, α désignant un paramètre réel donné.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. (a) Trouver une matrice B telle que $A = \alpha I_3 + B$.
   (b) Calculer B^2 et B^3. En déduire B^k, $\forall k \geq 3$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 19

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$, où a, b et c sont des nombres réels.

1. Déterminer a, b et c pour que A^2 soit la matrice nulle.
2. On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. On veut calculer M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Trouver P telle que $M = P + I_3$.
   (b) Par récurrence :
      i. Exprimer M^2 et M^3 en fonction de I_3 et P
      ii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I_3 + nP$.
   (c) Retrouver ce résultat avec la formule du binôme de Newton.
3. On pose $S_n = M + ... + M^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   Exprimer S_n en fonction de n. $\left(\text{Rappel : } 1 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \right)$

Exercice 20

On considère la matrice : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels.

1. Calculer $M^2(a,b)$.
2. On veut calculer $M^n(a,b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M = aI_2 + bB$.
   (b) Calculer B^2 . En déduire B^k, $\forall k \geq 2$.
   (c) Après avoir justifié l'utilisation de la formule du binôme, déterminer $M^n(a,b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) On suppose $a \neq 0$, la formule obtenue est-elle encore valable pour $n = 0$?
3. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -2u_n - v_n \end{cases}$,
   où u_0 et v_0 sont des nombres réels donnés.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   Trouver une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$. Déterminer a et b pour que $M = M(a,b)$.
   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.
   (c) En utilisant le résultat de la question 2., exprimer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 21

Sans aucun calcul, donner le déterminant des matrices suivantes :

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2I_3$,

$N_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $N_3 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

Exercice 22

On considère les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer M_1M_2 puis $\det(M_1M_2)$. Comparer ce résultat à $\det(M_1)\det(M_2)$.
2. Calculer $M_1 + M_2$ puis $\det(M_1 + M_2)$. Comparer ce résultat à $\det(M_1) + \det(M_2)$.

Exercice 23

En utilisant les formules de développement, calculer le déterminant des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24

En utilisant les opérations sur les lignes et les colonnes, calculer le déterminant des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 25

Calculer les déterminants suivants : (a, b, c et d désignent des nombres réels donnés)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 26

On pose : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & ... & 1 \\ -1 & 2 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ qui est le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n.

1. Démontrer que : $\forall n \geqslant 1$ on a : $\Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$ (On pose $\Delta_0 = 0$).
2. En déduire l'expression de Δ_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

   Indication : On remarquera tout d'abord que : $\Delta_n - \Delta_0 = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k - \Delta_{k-1}$.

Exercice 27

1. n désigne un nombre entier naturel impair supérieur à 2 et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Démontrer que si on a : ${}^tA = -A$ alors $\det(A) = 0$.
2. Vérifier le résultat précédent sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Le résultat démontré à la question 1 est-il encore valable lorsque n est un entier naturel pair non nul ? Justifier la réponse.

Exercices relatifs au Chapitre 3
Matrices inversibles

Exercice 28

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2, P^3 puis $P^3 - 2P^2 - 8P$.
2. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

Exercice 29

On considère la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2. En déduire que la matrice B est inversible et préciser B^{-1}.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$.

Exercice 30

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^2 + 3A - I_n = O_n$.
Démontrer que la matrice A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}.

Exercice 31

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $A = I_n - N$ où N est une matrice nilpotente d'ordre p, c'est à dire une matrice pour laquelle les puissances sont nulles à partir du rang $p + 1$.

1. Démontrer que A est inversible et que : $A^{-1} = I_n + N + N^2 + ... + N^p$.
2. Appliquer le résultat précédent à la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer alors A^{-1}.

Exercice 32

On considère le système (S) : $\begin{cases} x + 2y - 4z = a \\ -x - y + 5z = b \\ 2x + 7y - 3z = c \end{cases}$ où a, b et c sont trois nombres réels donnés.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1. Résoudre (S).
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.
   En utilisant la question 1), justifier que A est inversible et préciser A^{-1}

Exercice 33

Déterminer la matrice inverse des matrices suivantes (après avoir justifié son existence):

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois nombres réels donnés.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel donné.

Exercice 34

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.

1. Exprimer le déterminant de la matrice A, en fonction de λ.
   En déduire les valeurs de λ pour lesquelles la matrice A est inversible.
2. (a) Calculer A^2.
   (b) Pour quelle valeur de λ a-t-on : $A^2 = I_3$? Que peut-on en déduire pour la matrice A?
3. Par un calcul direct déterminer A^{-1} et vérifier le résultat de la question 2.b.

Exercice 35

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?
Dans l'affirmative, déterminer la matrice inverse, en utilisant la formule de la comatrice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 36

On considère le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ a^2 x + y + az = 1 \\ ax + a^2 y + z = 1 \end{cases}$ avec a un paramètre réel

1. Écrire le système sous sa forme matricielle. (On notera A la matrice associée à $(\mathcal{S})$)
2. Démontré que $\det(A) = (1 - a^3)^2$. Pour quelle valeur de a le système $\mathcal{S}$ est-il de Cramer ?
3. On suppose $a \neq 1$, résoudre $\mathcal{S}$ en utilisant les formules de Cramer.
   Simplifier les solutions en tenant compte de l'égalité $1 - a^3 = (1 - a)(1 + a + a^2)$.

Exercice 37

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ d'inconnues x, y, z

1. Pour quelles valeurs de m le système $\mathcal{S}$ est-il de Cramer ?
2. On suppose $m \neq -1$ et $m \neq 1$. Résoudre $\mathcal{S}$ en utilisant les formules de Cramer.
3. Étudier le cas $m = -1$ puis le cas $m = 1$.

Exercices relatifs au chapitre 4
La diagonalisation

Exercice 38

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres correspondants :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice B n'est pas diagonalisable.
3. Diagonaliser la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 40

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & -2(a+1) \\ a+1 & -a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. On suppose $a \neq -1$.
   (a) Justifier que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Que dire quand $a = -1$?

Exercice 41

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $AB = BA$.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
3. Déterminer une matrice inversible S, de deuxième ligne $(-1\ 1\ 1)$ telle que telle que $A = SDS^{-1}$.
4. Calculer S^{-1} puis $B' = S^{-1}BS$. Vérifier que B' est diagonale.

Dans cet exercice, nous avons fait une diagonalisation simultanée de A et B. C'est possible quand les matrices A et B commutent.

Exercice 42

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et on appelle P le polynôme caractéristique de la matrice A.

1. Démontrer que : $P(X) = (2-X)^2(1-X)$.
   Comment peut-on en déduire le déterminant de A?
2. (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A ainsi que les vecteurs associés.
   (b) Diagonaliser la matrice A.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire alors A^n sous la forme d'un produit de trois matrices.

Exercice 43

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
2. Justifier que A n'est pas diagonalisable.
3. Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $T = P^{-1}AP$ puis T^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 44

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par : $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + 2w_n \\ u_0 = v_0 = w_0 = 1 \end{array}\right.$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
   (On choisira des vecteurs dont la première composante est égale à 1).
   (b) Justifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.
   (c) Exprimer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.